数学 II 演習　足助太郎教官　第 2 回　解答

問 2.1. L 上の点 (x_1, x_2) について, ある $t \in \mathbb{R}$ を用いて $x_1 = tv_1, x_2 = tv_2$ とかけるから,

$t(a_1v_1 + a_2v_2) = 0$ これが勝手な t に対し成り立つので, 答えは $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$. □

問 2.2.

1) $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ とすると, $x \in P \Leftrightarrow a \cdot x = 0$.

$v, w \in P$ より $a \cdot v = a \cdot w = 0$ であるから, $a \cdot (tv + sw) = t(a \cdot v) + s(a \cdot w) = 0$.

$\therefore tv + sw \in P$. □

2) $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ とおくと, $u, v, w \in P$ より,

$$\begin{cases} a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0 & (1) \\ a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0 & (2) \\ a_1w_1 + a_2w_2 + a_3w_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

を充たす. $u = tx + su$ なる (s, t) を求める. 即ち連立方程式

$$\begin{cases} u_1 = tv_1 + sw_1 & (4) \\ u_2 = tv_2 + sw_2 & (5) \\ u_3 = tv_3 + sw_3 & (6) \end{cases}$$

を解く. 但し (6) は (1)〜(5) を連立させて得られるので (4)(5) について考えればよい.

(4)(5) より t を消去して $v_2u_1 - v_1u_2 = (v_2w_1 - v_1w_2)s$.

$v_2w_1 - v_1w_2 = 0$（即ち (1)〜(3) より $v = 0$ or $w = 0$ or $v /\!/ w$）のとき, $v_2u_1 - v_1u_2 \neq 0$ ならば解なし, $v_2u_1 - v_1u_2 = 0$ ならば s の解は任意の実数となる.

$v_2w_1 - v_1w_2 \neq 0$ のとき, $s = \dfrac{v_2u_1 - v_1u_2}{v_2w_1 - v_1w_2} = 0, u = \dfrac{w_2u_1 - w_1u_2}{v_2w_1 - v_1w_2} = 0$ と (s, t) はただ一つに定まる.

また, $tv + sw = 0$ なる $(s, t) \neq (0, 0)$ が存在すると仮定する. これを (s_0, t_0) とする.

$s_0 = 0$ とすると $t_0 \neq 0$ より $v = 0$, 同様に $t_0 = 0$ とすると $w = 0$.

$s \neq 0, t \neq 0$ とすると, $v = -\dfrac{s_0}{t_0}w$ より $v /\!/ w$.

従って, $\forall w \in P, \exists!(s, t) \in \mathbb{R}^2 (u = tv + sw) \Leftrightarrow u \neq 0, w \neq 0, u \not/\!/ w \Leftrightarrow (tv + sw = 0 \Rightarrow t = s = 0)$. □

（註：$\exists!$ は「唯一つ存在する」の意）

3) 2) より, $w = 0$ or $v = 0$ or $v /\!/ w$ のとき, $v_2u_1 - v_1u_2 \neq 0$ ならば (s, t) は存在しないので不適.

また $w \neq 0, v \neq 0, v \not/\!/ w$ のとき, 任意の $u \in \mathbb{R}^3$ に対し s, t が定まり,

これは 2) で述べたように一通りに定まる. □

問 2.3.

1) $u \in \mathbb{R}^3$ より $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とおけて,

$\langle a_1 | u \rangle = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0,$

$\langle a_2 | u \rangle = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$

となり一致する. □

2) 連立方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 & (2) \end{cases}$$

を考える.

x_1 を固定し x_2, x_3 について解くと

$x_2 = \dfrac{a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}}{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}}x_1, x_3 = \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}}x_1.$　（問 2.2. により分母は 0 でない）

従って, 例えば $v = \begin{pmatrix} a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} \\ a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23} \\ a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{pmatrix}$ とすることで $L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \exists t \in R, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = tv \right\}$ とできる. □

3) $v \neq 0$ のとき $L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \exists t \in R, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = tv \right\}$ は直線を表す.

$a_1 = 0$ のとき, (1) は任意の $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ について成り立つので, $L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \right\} \cdots (*)$

となるが, これは直線とならない（平面あるいは空間を表す）ので不適. $a_2 = 0$ のときも同様.

$a_1 /\!\!/ a_2$ のとき, 即ち実数 k を用いて $a_1 = ka_2$ と表されるとき, $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = k(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)$ より,(1) と (2) は同値となり, L は $(*)$ で表されるが同様に不適.

従って a_1, a_2 は $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_1 /\!\!/\!\!/ a_2$ を充たし, これは問 2.2. の 2) と 3) の条件と同値である. □

4) 問 2.1. において $\mathbb{R}^2$ の直線が 2 通りに表されているが, $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \neq 0$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq 0$ のときに, 一方から他方に書き換えが可能であることに対応する. □

問 2.4.

1) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$ であるから,

$T_\theta(x) = \begin{pmatrix} x_1\cos\theta + x_3\sin\theta \\ x_2 \\ -x_1\sin\theta + x_3\cos\theta \end{pmatrix}$, $S_\phi(x) = \begin{pmatrix} x_1\cos\phi - x_2\sin\phi \\ x_1\sin\phi + x_2\cos\phi \\ x_3 \end{pmatrix}$. □

2) $f(x) = \begin{pmatrix} (x_1\cos\theta + x_3\sin\theta)\cos\phi - x_2\sin\phi \\ (x_1\cos\theta + x_3\sin\theta)\sin\phi + x_2\cos\phi \\ -x_1\sin\theta + x_3\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos\theta\cos\phi - x_2\sin\phi + x_3\sin\theta\cos\phi \\ x_1\cos\theta\sin\phi + x_2\cos\phi + x_3\sin\theta\sin\phi \\ -x_1\sin\theta + x_3\cos\theta \end{pmatrix}$. □

3) $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ とおくと,

$$\begin{aligned} \langle T_\theta(v)|T_\theta(w)\rangle &= (v_1\cos\theta + v_3\sin\theta)(w_1\cos\theta + w_3\sin\theta) + v_2w_2 + (-v_1\sin\theta + v_3\cos\theta)(-w_1\sin\theta + w_3\cos\theta) \\ &= (v_1w_1\cos^2\theta + v_3w_3\sin^2\theta + v_1w_3\sin\theta\cos\theta + v_3w_1\sin\theta\cos\theta) + v_2w_2 + \\ &\quad (v_1w_1\sin^2\theta + v_3w_3\cos^2\theta - v_1w_3\sin\theta\cos\theta - v_3w_1\sin\theta\cos\theta) \\ &= v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 = \langle v|w\rangle. \square \end{aligned}$$

4) v, w を 3) と同様に定める.3) と同様にして $\langle S_\phi(v)|S_\phi(w)\rangle$ がいえるから,

$\langle f(v)|f(w)\rangle = \langle S_\phi(T_\theta(v))|S_\phi(T_\theta(w))\rangle = \langle T_\theta(v)|T_\theta(w)\rangle = \langle v|w\rangle$. □

5) $\langle f(a)|f(x)\rangle = \langle a|x\rangle$ より, 任意の P 上の点は

平面 $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \langle f(a)|x\rangle = 0 \right\}$ 上に移される. 即ち $f(P) \subset Q$.

また, $T_\theta^{-1}(x) = \begin{pmatrix} x_1\cos\theta - x_3\sin\theta \\ x_2 \\ x_1\sin\theta + x_3\cos\theta \end{pmatrix}$, $S_\phi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} x_1\cos\phi + x_2\sin\phi \\ -x_1\sin\phi + x_2\cos\phi \\ x_3 \end{pmatrix}$ として,

$f^{-1}(x) = T_\theta^{-1}(S_\phi^{-1}(x))$ を考えると, $f(f^{-1}(x)) = x$ であるから,

任意の $x \in Q$ に対し $y = f^{-1}(x) \in P$ をとれば, $f(y) = x$ とできる. 即ち $f(P) \supset Q$.

従って $f(P) \subset Q$ かつ $f(P) \supset Q$ なので $f(P) = Q$ より平面となる. □

（註：$T_\theta^{-1}(x), S_\phi^{-1}(x)$ はそれぞれ $T_\theta^{-1}(x), S_\phi^{-1}(x)$ の θ, ϕ を $(-\theta), (-\phi)$ に置換したもの）

6) $a_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \|a\| \end{pmatrix}$ とすると, $P_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \langle a_0|x\rangle = 0 \right\}$ と表せる.

$\cos\theta = \dfrac{a_3}{\|a\|}, \sin\theta = \dfrac{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}}{||a||}$ なる θ, 及び $\cos\phi = \dfrac{a_1}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}}, \sin\phi = \dfrac{a_2}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}}$ なる ϕ をとれば,

$f(a_0) = \|a\| \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a$ となるから, 5) により $P = f(P_0)$ が成り立つ. また, このとき

$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\|a\|\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}} \begin{pmatrix} a_1a_3 \\ a_2a_3 \\ {a_1}^2 + {a_2}^2 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}} \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. □

問 2.5.

1) $AB = (\mathrm{re}\, A + \sqrt{-1}\,\mathrm{im}\, A)(\mathrm{re}\, B + \sqrt{-1}\,\mathrm{im}\, B) = (\mathrm{re}\, A\,\mathrm{re}\, B - \mathrm{im}\, A\,\mathrm{im}\, B) + \sqrt{-1}(\mathrm{im}\, A\,\mathrm{re}\, B - \mathrm{re}\, A\,\mathrm{im}\, B)$.

$\therefore \mathrm{re}\, AB = \mathrm{re}\, A\,\mathrm{re}\, B - \mathrm{im}\, A\,\mathrm{im}\, B, \mathrm{im}\, AB = \mathrm{im}\, A\,\mathrm{re}\, B - \mathrm{re}\, A\,\mathrm{im}\, B$. □

2) $A \in M_n(\mathbb{R})$ に対し, $AB = BA = E_n$ なる $B \in M_n(\mathbb{C})$ が存在したとする.

$\mathrm{re}\, A = A, \mathrm{im}\, A = O_n$ であるから, 1) より

$$\begin{cases} A\,\mathrm{re}\, B = \mathrm{re}\, B\, A = E_n, & (1) \\ A\,\mathrm{im}\, B = O_n. & (2) \end{cases}$$

(2) に左から $\mathrm{re}\, B$ をかけると, (1) より

$\mathrm{re}\, B\, A\,\mathrm{im}\, B = \mathrm{re}\, B\, O_n \Leftrightarrow \mathrm{im}\, B = O_n \therefore B \in M_n(\mathbb{R})$. □

（註：$\mathrm{re}\, X$ は行列 X の実部, $\mathrm{im}\, X$ は X の虚部である.）

問 2.6. 答えは

$${}^tA = \begin{pmatrix} {}^tA_{11} & {}^tA_{21} & \cdots & {}^tA_{p1} \\ {}^tA_{12} & {}^tA_{22} & \cdots & {}^tA_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^tA_{1q} & {}^tA_{2q} & \cdots & {}^tA_{pq} \end{pmatrix} \square$$