数学 IA 講義ノート(No.3) 理科一類 37 組

～はじめに～

数学 IA の講義ノート第 3 弾です.今回も前回に引き続き,基本事項や定理,問題を一通り提示し,最後に問題の解答を掲載するという形式になっています.今学期の内容はこの講義ノートで最後となります.

…ちなみに全部で 32 ページです.

第 3 章 偏微分

§3.1 多変数関数

正の整数dに対し,

$$\mathbb{R}^d = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \middle| x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

と定めます.$d = 1$の場合は,単に$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$と書きます.$\mathbb{R}^d$の部分集合$D$から$\mathbb{R}^{d'}$への写像$f$がこの章での考察対象です.今までは$d = d' = 1$の場合を考えていたわけですから,ずいぶん複雑になった気がします.ただ,$\mathbb{R}^{d'}$への出力は$\mathbb{R}$への出力をd'個並べたものと考えることができますから,$d' = 1$の場合を議論すれば十分です.従って以下では

$$f: D(\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$$

を考えます.

$\mathbb{R}^d$の要素$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$に対し,

$$\left| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} {x_i}^2}$$

と定めます.つまり$|\cdot|$によってベクトルの大きさを対応させます.$\|\cdot\|$と書く場合も多いです.

この章では多変数関数の性質を調べるわけですが,その前に 1 変数のときと同じく点列が収束することの定義をします.

点列$P_n = \begin{pmatrix} {x_1}_n \\ \vdots \\ {x_d}_n \end{pmatrix}$と点$P_0 = \begin{pmatrix} {x_1}_0 \\ \vdots \\ {x_d}_0 \end{pmatrix}$に対して

$$|P_n - P_0| \to 0$$

となるとき,$(P_n)_{n=1}^{\infty}$はP_0に収束するといい,

$$P_n \to P_0$$

と書く.

2 変数の場合を考えてみましょう.点列$P_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$と点$P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$に対して

$$|P_n - P_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}$$

ですから,

$$P_n \to P_0 \iff x_n \to x_0\,, y_n \to y_0$$

が成り立ちます.つまり,成分ごとに収束することが点列が収束することの必要十分条件になるというわけです.

次に多変数関数が連続であることの定義をします.

$f: D(\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$が点$P_0 \in D$において連続であるとは,$P_0$に収束する任意の点列$(P_n)_{n=1}^{\infty} \subset D$に対して

$$f(P_n) \to f(P_0)$$

となるときをいう.Dの各点で連続のとき,単に連続という.

次の定理は,1 変数の場合の$\varepsilon - \delta$条件と同等です.

定理 3.1.1

$$f\text{が点}P_0\text{で連続} \iff {}^{\forall}\varepsilon > 0 {}^{\exists}\delta > 0\ [|P_n - P_0| < \delta \implies |f(P_n) \to f(P_0)| < \varepsilon].$$

Ex3.1.1 次の関数が原点において連続か否かを判定し,そのことを示せ.

(1) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} \ \big((x,y) \neq (0,0)\big), \\ 0 \text{ (otherwise)} \end{cases}$$

(2) $$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \ \big((x,y) \neq (0,0)\big), \\ 0 \text{ (otherwise)} \end{cases}$$

次の定理も 1 変数のときにやりました.点列$(P_n)_{n=1}^{\infty}$が有界であるとは,

$${}^{\forall}n {}^{\exists}M > 0\ [|P_n| < M]$$

となることです.

定理 3.1.2(Bolzano-Wierstrass の定理) 有界な点列$(P_n)_{n=1}^{\infty}$は収束部分列$\left(P_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$を持つ.

さて,$\mathbb{R}$の部分集合として閉区間が定義されましたが,$\mathbb{R}^d$においてそれと似た概念である閉集合を定義します.

$D \subseteq \mathbb{R}^d$が閉集合であるとは,D内の任意の収束列$(P_n)_{n=1}^{\infty}$に対して

$$\lim_{n\to\infty} P_n \in D$$

となることをいう.

たとえば$\mathbb{R}$の閉区間は閉集合ですし,$\mathbb{R}^d$だと$\{P \subseteq \mathbb{R}^d \,\big|\, |P| \le r\}$など,いくらでも例はあります.要は境界を含む集合のことですね.やや病的な例としては 1 点からなる集合や,空集合及び$\mathbb{R}^d$自身も閉集合です.

定理 3.1.3 $D \subseteq \mathbb{R}^d$を有界閉集合とする.$f: D \to \mathbb{R}$が連続のとき,次が成り立つ.

(1) fは有界である.

(2) fは最大値,最小値を持つ.

(3) fは一様連続である.

これも 1 変数のときにやりました.なんだか同じことの繰り返しみたいで少しうんざりしてきますね.ここでは一様連続についてはあまり気にしなくていいと思います.

§3.2 偏微分と全微分

いよいよ多変数関数の微分を扱います.まずは偏微分の定義です.簡単のため,2 変数の場合を扱います.3 変数以上の場合も同様です.

$f(x,y)$に対して

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

が存在するとき,fはxに関して偏微分可能であるといい,これをfのxに関する偏導関数とよぶ.yに関しても同様に定義する.
偏導関数を求めることを偏微分するという.

つまり,xに関する偏導関数を求めることは,yを定数とみなして導関数を求めることと同じです.従って,計算自体は難なくできると思います.
なお,fのxに関する偏導関数をf_xと書くことも多いです.

Ex3.2.1 次の関数の原点以外における偏導関数と,原点における偏微分係数を各変数に関して求めよ:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} \ \left((x,y) \neq (0,0)\right), \\ 0 \ (\text{otherwise}) \end{cases}$$

次に,多変数関数がC^1級であることの定義をします.これも 2 変数の場合の定義ですが,3 変数以上でも同様です.

$f: D(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$が点$P_0$において$C^1$級であるとは,

$$\text{集合}\{P \,|\, |P - P_0| \leq \varepsilon\}({}^{\exists}\varepsilon > 0)\text{上で}\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\text{が存在し,かつ連続}$$

となるときをいう.Dの各点でC^1級のとき,単にC^1級という.

つまり,点P_0の「近く」で各偏導関数が存在して,それが連続となることです.数学用語では「近く」 を近傍といいます.
次の定理で点$P_0(x_0, y_0)$における(a, b)方向微分

$$\left(D_{(a,b)}f\right)(P_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ah, y_0 + bh) - f(x_0, y_0)}{h}$$

を導入します.小澤先生が作った記号で,結構どこでも通用するらしいです.

定理 3.2.1

$$f\text{が点}P_0\text{で}C^1\text{級} \Longrightarrow f\text{は点}P_0\text{で連続, かつ}\left(D_{(a,b)}f\right)(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)a + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)b.$$

この定理によると

$$\frac{f(x_0 + ah, y_0 + bh) - f(x_0, y_0)}{h} \approx \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)a + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)b$$

ですから,

$$f(x_0 + ah, y_0 + bh) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)ah + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)bh.$$

すなわち

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

が成り立ちます.一般に$z = f(x, y)$は空間内の曲面を表しますが,方程式

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

で定義される平面を,点$\left(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right)$における$z = f(x, y)$のグラフの接平面とよびます.

Ex3.2.2 曲面$x^3 + xz + yz - 3 = 0$上の点$(1,1,1)$における接平面の式を求めよ.

さて,全微分の定義をしましょう.

$f\colon D(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$が点$P_0$において全微分可能であるとは,

$$\lim_{P\to P_0} \frac{\left|f(P) - \left(f(P_0) + (\nabla f)(P_0)\cdot(P - P_0)\right)\right|}{|P - P_0|} = 0$$

となることをいう.

この式において

$$(\nabla f)(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0)\right)$$

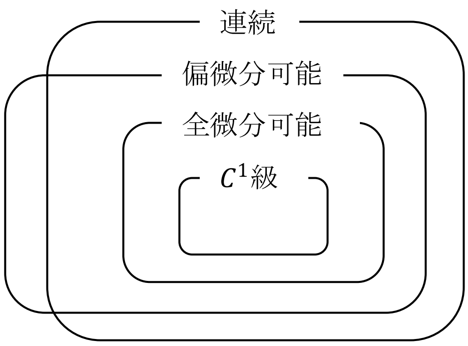
であって,$(\nabla f)(P_0)\cdot(P - P_0)$は$(\nabla f)(P_0)$と$(P - P_0)$との内積を意味します.つまり,2 変数の場合には

$$\lim_{P\to P_0} \frac{\left|f(P) - \left(f(P_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y - y_0)\right)\right|}{|P - P_0|} = 0$$

が成り立つとき,fは点$P_0(x_0, y_0)$において全微分可能というわけです.ちなみに,C^1級の関数は全微分可能です.

∇fは勾配(gradient)とよばれ,$\mathrm{grad}\, f$とも書きます.ベクトル∇fの向きは,fの値が最も増加する方向を表します.

これまでに多変数関数の連続,偏微分可能,全微分可能,C^1級について学びましたが,偏微分可能でも連続でない例があったりして,1 変数の場合と同じ感覚では理解しにくい部分もありましたから,一応右にそれらの包含関係を図示しました.少しは見通しよくなったでしょうか?



Ex3.2.3 次の関数が原点において全微分可能か否かを判定し,そのことを示せ.

(1) $$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \left((x,y) \neq (0,0)\right), \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

(2) $$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \left((x,y) \neq (0,0)\right), \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

§3.3 連鎖律

連鎖律とは多変数関数における合成関数の微分法です.一般形の前に,最も基本的な次の定理から.

定理 3.3.1 $f: D(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$が$C^1$級で

$$\begin{array}{cccc} g: & E(\subseteq \mathbb{R}) & \to & D \\ & t & \mapsto & \left(x_1(t), \cdots, x_n(t)\right) \end{array}$$

もC^1級のとき,1 変数関数$f\left(x_1(t), \cdots, x_n(t)\right)$も$C^1$級で

$$\frac{df}{dt}\left(x_1(t), \cdots, x_n(t)\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x_1(t), \cdots, x_n(t)\right)\frac{dx_i}{dt}(t).$$

一般に,$f: D(\subseteq \mathbb{R}^n) \to E(\subseteq \mathbb{R}^m)$に対して$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$の Jacobi 行列を

$$J_f(P_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P_0) \end{pmatrix}$$

と定義すると,次の定理が成り立ちます.

定理 3.3.2(連鎖律) $f: D(\subseteq \mathbb{R}^n) \to E(\subseteq \mathbb{R}^m)$, $g: E \to \mathbb{R}^l$が共にC^1級のとき,$g \circ f: D \to \mathbb{R}^l$も$C^1$級であり,

$$J_{g\circ f}(P_0) = J_g\left(f(P_0)\right)J_f(P_0).$$

ここで,行列の型について

$$(l, n)\text{型} = (l, m)\text{型} \times (m, n)\text{型}$$

が成り立っていることを注意しておきます.
また,

$$(\nabla f)(P_0) = J_f(P_0)P_0$$

が成り立ちます.ただし,右辺はP_0をn次の縦ベクトルと見たときの行列としての積を意味します.$(\nabla f)(P_0) \in \mathbb{R}^m$ですから,この式を意識すると Jacobi 行列の行と列を間違えにくくなると思います.

次に,後で必要となる高階の偏微分と,それに関連して多変数関数に対する Talor の定理を紹介します.

fのxに関する偏導関数を$\frac{\partial f}{\partial x}$,あるいは$f_x$と書いたのでした.これをもう 1 度$x$に関して偏微分したものを

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \text{あるいは} f_{xx}$$

などと書き,yに関して偏微分したものについては

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \text{あるいは} f_{xy}$$

などと書きます.文字の順番に気をつけて下さい.fが点P_0においてC^2級であるとは,fの 2 階以下の偏導関数(2 変数では$f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$の 6 つ)すべてが点$P_0$の近傍で存在して連続となることです.また,一般に$f_{xy} \neq f_{yx}$となることに注意して下さい.

Ex3.3.1 次の関数に対し,$f_{xy}(0,0)$及び$f_{yx}(0,0)$を求めよ.

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \big((x,y) \neq (0,0)\big), \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

しかし,次の定理が成り立ちます.

定理 3.3.3

$$f\text{が}C^2\text{級} \implies f_{xy} = f_{yx}.$$

同様に$n \geq 3$に対してもn次偏導関数,C^n級が定義されます.何回でも微分可能で,偏導関数,高次偏導関数がすべて連続な関数をC^∞級とよびます.

一応ですが多変数 Taylor の定理を載せておきます.

定理 3.3.4(多変数 Taylor の定理) $f: D(\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$が$C^{n+1}$級のとき,

$$f(P_0 + u) = \sum_{k=0}^{n} \frac{((u \cdot \nabla)^k f)(P_0)}{k!} + R_n(u).$$

ただし,$R_n: D \to \mathbb{R}$は

$$\lim_{|u| \to 0} \frac{|R_n(u)|}{|u|^n} = 0$$

を満たす.

この定理より,2 変数の場合に次の近似式が成り立ちます:

$$f(x+h, y+k) \approx f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)k$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)hk + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)k^2.$$

この式は次のセクションで使います.

さて,微分演算子の話です.ここでは簡単のため 2 変数の場合を扱います.
2 変数関数$f(x,y)$において

$$x=\varphi(u,v)\,,y=\psi(u,v)$$

という変数変換を施したとします.このとき定理 3.3.1 より

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y}$$

が成り立ちます.この式を「fに演算$\frac{\partial}{\partial u}$($\Leftrightarrow u$に関する偏微分)を施すことは,$f$に演算$\frac{\partial}{\partial x}$($\Leftrightarrow x$に関する偏微分)を施してから$\frac{\partial \varphi}{\partial u}$を掛けたものと$f$に演算$\frac{\partial}{\partial y}$($\Leftrightarrow y$に関する偏微分)を施してから$\frac{\partial \psi}{\partial u}$を掛けたものとを足すことに(演算規則として)等しい」と捉えて,演算の記号(=演算子)だけを抽出すると

$$\frac{\partial}{\partial u}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial}{\partial y}$$

となります.同様に

$$\frac{\partial}{\partial v}=\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial}{\partial y}$$

です.微分に関する演算子なので微分演算子というわけです.

Ex3.3.2 $\frac{\partial^2}{\partial u^2},\frac{\partial^2}{\partial v^2}$を$x,y$で表せ.

Ex3.3.3 極座標変換$x=r\cos\theta\,,y=r\sin\theta$に対し,2 変数ラプラシアン

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

をr,θで表せ.

微分演算子を微分作用素という場合も多いです.作用素とは,関数を関数に対応させる写像のことです.

§3.4 極値と最大・最小問題

始めに極大・極小を定義します.

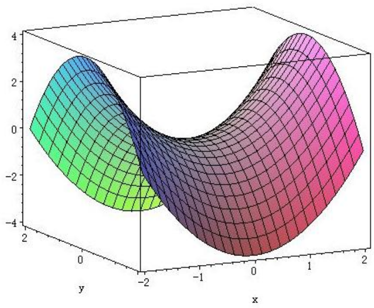
$$f\text{が点}P_0\text{で極大} \iff {}^{\exists}\varepsilon>0\,{}^{\forall}|u|<\varepsilon\,[f(P_0)\geq f(P_0+u)],$$
$$f\text{が点}P_0\text{で極小} \iff {}^{\exists}\varepsilon>0\,{}^{\forall}|u|<\varepsilon\,[f(P_0)\leq f(P_0+u)],$$

1 変数のとき「fが点P_0で極大(極小)かつ点P_0で微分可能$\Longrightarrow f'(P_0)=0$」が成り立ちました. 多変数の場合,この定理と対応して次が成り立ちます.

定理 3.4.1

$$f: D(\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R} \text{ が点}P_0\text{で極大(極小)かつ点}P_0\text{で微分可能} \Longrightarrow (\nabla f)(P_0)=0.$$

逆が成り立たないことに注意しましょう.たとえば$f(x,y)=x^2-y^2$に対して$(\nabla f)(0,0)=(0,0)$ですが,点$(0,0)$で極値をとりません.$z=f(x,y)$のグラフは右図のようになりますから,原点におけるx軸方向の直線上では極小,y軸方向の直線上では極大となっていることが確認できると思います.このような点を鞍点とよびます(「鞍」とは「人が乗りやすいように牛・馬などの背に置く具」です).



また,$(\nabla f)(P_0)=0$となる点は停留点ないし臨界点とよばれます.$p.7$の一番下で2変数の2次近似式を示しましたが,$(\nabla f)(P_0)=0$とすると 1 次近似項が 0 ですから

$$f(P_0+u) \approx f(P_0) + \frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)$$

と書けます.ここで$u=(h,k), A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0), B=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0), C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0)$です.$f$が点$P_0$において極値を持つか否かは,$B^2-AC \neq 0$のときにはその符号で判別できます:

(1) $B^2-AC<0$のとき

「2 次関数における判別式の値が負の場合」をイメージすると分かるように,$u=(h,k)\neq(0,0)$のとき$Ah^2+2Bhk+Ck^2$の符号は変わりません.$A>0$のときには$Ah^2+2Bhk+Ck^2>0$ですから,点P_0の近傍でのfの値は常に$f(P_0)$より大きくなります.つまりfは点P_0で極小となります.逆に$A<0$のときには極大となります.いずれにせよfは点P_0で極値をとるというわけです.

(2) $B^2-AC>0$のとき

$u=(h,k)$によって$Ah^2+2Bhk+Ck^2$の符号が変化しますから,極大でも極小でもありません.すなわち点P_0は鞍点となります.

$B^2-AC=0$のときには,点P_0において極値を持つか否かは不明です.より高次の偏微分を調

べなければなりません.
一般にd変数のとき,多変数 Taylor の定理(定理 3.3.4)より,2 次近似式は次のようになります.ただし,$u=(u_1,\cdots,u_d)$です:

$$f(P_0+u)\approx f(P_0)+\frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(P_0)u_iu_j\right)$$

$$=f(P_0)+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}u_1 & \cdots & u_d\end{pmatrix}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(P_0)\right)_{1\leq i,j\leq d}\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_d\end{pmatrix}.$$

ここでd次正方行列

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(P_0)\right)_{1\leq i,j\leq d}=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_d}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_d}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_d\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_d}^2}\end{pmatrix}$$

を$H_f(P_0)$と書き,Hesse 行列とよびます.fが点P_0において極値を持つ条件として,次の定理が知られています.

定理 3.4.2 $f:D(\subseteq\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}$は$C^2$級とし,点$P_0$において$(\nabla f)(P_0)=0$を満たすとする.このとき,Hesse 行列$H_f(P_0)$の固有値が
(1) すべて正ならばfは点P_0で極小,
(2) すべて負ならばfは点P_0で極大,
(3) 正負が混合しているならば,点P_0は鞍点.

固有値については冬学期に数学 II で学ぶと思いますが,ここでも少しだけ話をしておきましょう.

n次正方行列Aの固有値とは,λを未知数とするn次方程式

$$\det(A-\lambda E_n)=0$$

の解である.ただし,E_nはn次単位行列を表す.

Aが対称行列,つまり${}^tA=A$を満たすとき,固有値はすべて実数であることが知られています.C^2級の関数に対する Hesse 行列は,定理 3.3.3 より対称行列となりますから,その固有値はすべて実数です.

Ex3.4.1 次の関数の極値と,それを与える点を求めよ.

(1) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

(2) $f(x,y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$

Ex3.4.2 周長が一定の三角形の中で,最大の面積を持つものは何か.

§3.5 陰関数

まず 2 変数の場合を説明します.一般に$z = F(x,y)$は空間内の曲面を表しますが,その$z = 0$における切り口,すなわちxy平面での切り口は曲線になりますね.このxy平面上の曲線$F(x,y) = 0$上の点$P_0(x_0, y_0)$の近傍でyをxの関数と見なすことができます(ただし$F_y(P_0) \neq 0$).このことを強調して$y = y(x)$と書き,$F\big(x, y(x)\big) = 0$として両辺をxについて微分してから$x = x_0$を代入すると,

$$F_x(P_0) + \frac{dy}{dx}(x_0) F_y(P_0) = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}(x_0) = -\frac{F_x(P_0)}{F_y(P_0)}.$$

途中で$F_y(P_0) \neq 0$と断りましたが,それは$F_y(P_0) = 0$のときには点P_0における接線がy軸と平行になり,xに対してただ一つのyが定まらないからです.

$\frac{dy}{dx}$が求まりましたから,接線の方程式を求めることができます:

$$y - y_0 = -\frac{F_x(P_0)}{F_y(P_0)}(x - x_0)$$

$$\therefore F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) = 0.$$

この式は$F_y(P_0) = 0$のときも($F_x(P_0) \neq 0$ならば)成り立ちます.以上のことを主張するのが陰関数定理です.一応まとめておきましょう.

定理 3.5.1 $F(x,y)$がC^1級,点$P_0(x_0, y_0)$は曲線$F = 0$上の点とする.$F_y(P_0) \neq 0$ならば,点P_0の近傍において曲線$F = 0$は$y = y(x)$と表わされ,

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = -\frac{F_x(P_0)}{F_y(P_0)}.$$

また,$(\nabla F)(P_0) \neq 0$のとき,点P_0における曲線$F = 0$の接線の方程式は

$$F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) = 0.$$

ちなみに$F_x(P_0) = F_y(P_0) = 0$となる点,すなわち$z = F(x,y)$の停留点においては曲線$F(x,y) = 0$が自己交差している場合などがあります.従って他の点とは別に扱う必要があり,この意味でP_0をFの特異点とよぶことがあります.

次に,3 変数の場合です.今度は空間内の曲面$F(x,y,z)=0$に対し,その接平面を考えます.
点$P_0(x_0,y_0,z_0)$が曲面$F=0$上にあるとし,点P_0の近傍の曲面$F=0$は$z=z(x,y)$と表わされるとします.$F\big(x,y,z(x,y)\big)=0$の両辺をxについて偏微分してから$x=x_0$を代入すると,

$$F_x(P_0)+\frac{\partial z}{\partial x}(x_0)F_z(P_0)=0$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}(x_0)=-\frac{F_x(P_0)}{F_z(P_0)}.$$

同様に

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0)=-\frac{F_y(P_0)}{F_z(P_0)}.$$

よって,点P_0における接平面の方程式は

$$z-z_0=-\frac{F_x(P_0)}{F_z(P_0)}(x-x_0)-\frac{F_y(P_0)}{F_z(P_0)}(y-y_0)$$

$$\therefore F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0.$$

これも定理の形に整えておきましょう.

定理 3.5.2 $F(x,y,z)$がC^1級,点$P_0(x_0,y_0,z_0)$は曲面$F=0$上の点とする.$F_z(P_0)\neq 0$ならば,点P_0の近傍において曲面$F=0$は$z=z(x,y)$と表わされ,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0)=-\frac{F_x(P_0)}{F_z(P_0)},\ \frac{\partial z}{\partial y}(x_0)=-\frac{F_y(P_0)}{F_z(P_0)}.$$

また,$(\nabla F)(P_0)\neq 0$のとき,点P_0における曲面$F=0$の接面の方程式は

$$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0.$$

定理 3.5.1 で与えた接線の方程式と定理 3.5.2 で与えた接面の方程式は,共に

$$(\nabla F)(P_0)\cdot(P-P_0)=0$$

と書くことができます.

Ex3.5.1 曲面$x^3+xz^2+y^2z+2=0$上の点$(1,2,-3)$における接平面の式を求めよ.

§3.6 条件付き最大・最小問題

「条件$g=0$の下でfの最大・最小を求める」という問題を考えます.fが極値をとることはfが最大あるいは最小となるための必要条件ですから,まずはfが極値をとるための条件を考えましょう.曲線$g=0$上の点を$P(t)$と媒介変数表示し,$t=t_0$においてfが極値をとるとします.$g\big(P(t)\big)=0$の両辺をtで微分してから$t=t_0$を代入すると

$$(\nabla g)\big(P(t_0)\big)\cdot P'(t_0)=0.$$

一方,fは$t = t_0$において極値をとりますから,$t = t_0$における$f\big(P(t)\big)$の微分は 0 となります.つまり

$$(\nabla f)\big(P(t_0)\big) \cdot P'(t_0) = 0.$$

従って$\nabla f, \nabla g$は共に$P'(t_0)$と直交しているので,$P'(t_0) \neq 0$ならば∇fと∇gは平行となります.このとき

$$^{\exists}\lambda \in \mathbb{R}\ [\nabla f = \lambda \nabla g]$$

が成り立ちます.
この事実から,次の定理が得られます.

定理 3.6.1(Lagrange の未定乗数法) C^1級の関数$f(x,y), g(x,y)$が与えられているとする.条件$g = 0$の下で$f(x,y)$の最大値,最小値を与える点は,次のいずれかの点である.
(1) $\nabla g = 0$となる点.
(2) x, y, λを未知数とする次の連立方程式の解を与える点:

$$\nabla f = \lambda \nabla g\ ,\ g = 0.$$

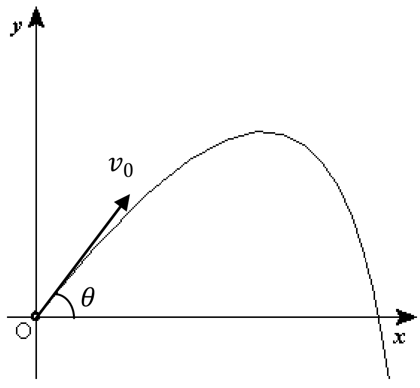
3 変数以上の場合にも同様です.

Ex3.6.1 条件$x^2 + y^2 = 1$の下で,$f(x,y) = x^3 + y^3$の最大値,最小値を求めよ.

Ex3.6.2 速度に比例する空気抵抗を受ける放物体を考える.時刻 0 に初速v_0,仰角θで点(0,0)から投射した物体の時刻tにおける位置(x,y)は,重力加速度をg,抵抗力を$-\beta m v$とすると次式で与えられる(導出は力学の教科書p. 55~を参照):

$$\begin{cases} x = \dfrac{v_0 \cos\theta}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right), \\[2ex] y = -\dfrac{g}{\beta} t + \dfrac{1}{\beta}\left(v_0 \sin\theta + \dfrac{g}{\beta}\right)\left(1 - e^{-\beta t}\right). \end{cases}$$

このとき,水平到達距離が最大となる仰角θ_0が満たすべき方程式を書け(解く必要はない).



Column ～実数の世界へ～

前回の続きです.まずはかくも不思議な数「複素数」が世に認められた経緯から.
16 世紀初頭までは多くの人が複素数の存在を信じていませんでした(負の数すら嫌われていたそうです).しかし,1537 年に発見された 3 次方程式の解法,通称 Cardano の公式(発見者は Tartaglia)により,人々はそれを認めざるを得なくなったのです.というのは,Cardano の公式において実数解は共役複素数の和として表示されることが多いのですが,その有用性を否定することは誰にもできなかったからです.かくして複素数は世の中に受け入れられ,様々な発見を経て現在に至るわけです.

複素関数論は,一見すると実数の範囲を出ない問題にも広く応用されます.ここではその応用の一例を示します(タイトルはその程度の意味です).次の問題を考えましょう:

次の無限級数の和を求めよ.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$$

いたってシンプルな問題で,実数の範囲でも解けそうな気がしますよね?しかし,和を求めることはおろか,この級数が収束することすら簡単には示せません.
実数の範囲で,この級数が収束することを証明してみましょう.そのために,まず次の補題を示します.

補題(Dirichlet's test) 実数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$が次の条件を満たせば,$\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ は収束する.
(1) $a_n \geq a_{n+1} > 0\ ({}^{\forall}n)$
(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
(3) ${}^{\exists}M > 0\,{}^{\forall}N \in \mathbb{N}\ [|\sum_{n=1}^{N} b_n| \leq M]$

[証明] $B_j = \sum_{n=1}^{j} b_n$とすると, $k, l \in \mathbb{N}\ (k < l)$に対して

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{l} a_n b_n = \sum_{n=0}^{l} a_n b_n - \sum_{n=0}^{k-1} a_n b_n \\ &= \sum_{n=0}^{l-1}(a_n - a_{n+1})B_n - \sum_{n=0}^{k-2}(a_n - a_{n+1})B_n + a_l B_l - a_{k-1}B_{k-1} \\ &= \sum_{n=k-1}^{l-1}(a_n - a_{n+1})B_n + a_l B_l - a_{k-1}B_{k-1}\end{aligned}$$

が成り立つから,条件(1),(3)より

$$\left|\sum_{n=k}^{l} a_n b_n\right| \leq \sum_{n=k-1}^{l-1} |(a_n - a_{n+1})B_n| + |a_l B_l| + |a_{k-1}B_{k-1}|$$
$$\leq M\left(\sum_{n=k-1}^{l-1}(a_n - a_{n+1}) + a_l + a_{k-1}\right) = 2Ma_{k-1}.$$

条件(2)より

$$^\forall\varepsilon > 0\,^\exists N \in \mathbb{N}\,^\forall n > N\ \left[a_n < \frac{\varepsilon}{2M}\right]$$

であるから, $k-1 > N$のとき

$$\left|\sum_{n=k}^{l} a_n b_n\right| < \varepsilon$$

となる.よって,Cauchy の収束条件(系 1.2.12)より, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ は収束する.　(Q.E.D.)

[$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$が収束することの証明] $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \sin n$としよう.これらが補題の条件を満たすことを示せばよい.

条件(1),(2)については自明である.条件(3)が成り立つことを示す.そのために

$$\sum_{n=1}^{N} \sin n = \frac{\sin 1 + \sin N - \sin(N+1)}{2(1-\cos 1)} \tag{C.1}$$

が任意の$N \in \mathbb{N}$で成り立つことを数学的帰納法で示す.

(Ⅰ) $N = 1$のとき

$$(\text{右辺}) = \frac{2\sin 1 - \sin 2}{2(1-\cos 1)} = \frac{2\sin 1 - 2\sin 1\cos 1}{2(1-\cos 1)} = \frac{2\sin 1\,(1-\cos 1)}{2(1-\cos 1)} = \sin 1 = (\text{左辺})$$

よって(C.1)式は成り立つ.

(Ⅱ) $N = k$のとき(C.1)式の成立を仮定すると, $N = k+1$のとき

$$(\text{左辺}) = \sum_{n=1}^{k} \sin n + \sin(k+1) = \frac{\sin 1 + \sin k - \sin(k+1)}{2(1-\cos 1)} + \sin(k+1)$$
$$= \frac{\sin 1 + \sin k - \sin(k+1) + 2\sin(k+1)\,(1-\cos 1)}{2(1-\cos 1)}$$
$$= \frac{\sin 1 + \sin\big((k+1)-1\big) + \sin(k+1) - 2\sin(k+1)\cos 1}{2(1-\cos 1)}$$
$$= \frac{\sin 1 + \sin(k+1) + \sin(k+1)\cos 1 - \cos(k+1)\sin 1 - 2\sin(k+1)\cos 1}{2(1-\cos 1)}$$
$$= \frac{\sin 1 + \sin(k+1) - (\sin(k+1)\cos 1 + \cos(k+1)\sin 1)}{2(1-\cos 1)}$$
$$= \frac{\sin 1 + \sin(k+1) - \sin(k+2)}{2(1-\cos 1)} = (\text{右辺})$$

よって(C.1)式は成り立つ.
(Ⅰ),(Ⅱ)より,任意の$N \in \mathbb{N}$で(C.1)式が成り立つ.従って

$$\left|\sum_{n=1}^{N} b_n\right| = \left|\frac{\sin 1 + \sin N - \sin(N+1)}{2(1-\cos 1)}\right| \leq \frac{2+\sin 1}{2(1-\cos 1)} \quad ({}^{\forall}N \in \mathbb{N})$$

であるから,$M = \frac{2+\sin 1}{2(1-\cos 1)}$とすればよい.題意は示された. (Q.E.D.)

やっと証明できました.かなり大変でしたね.実はすでに複素関数論の成果が用いられているのですが,気付きましたか?
(C.1)式の成立を数学的帰納法で示したわけですが,前回紹介した Euler の公式を使うと直接証明できます.

[(C.1)式の証明] $z \in \mathbb{C}$に対し,$\mathrm{Im}\, z$でzの虚部を表す.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \sin n &= \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{N}(\cos n + i \sin n)\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{N} e^{in}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^i\left(1-e^{iN}\right)}{1-e^i}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{(\cos 1 + i \sin 1)(1 - \cos N - i \sin N)}{1 - \cos 1 - i \sin 1}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{-1 + \cos 1 + \cos N - \cos(N+1)}{2(1-\cos 1)} + i\frac{\sin 1 + \sin N - \sin(N+1)}{2(1-\cos 1)}\right) \\ &= \frac{\sin 1 + \sin N - \sin(N+1)}{2(1-\cos 1)}.\end{aligned}$$

よって示された. (Q.E.D.)

副産物として

$$\sum_{n=1}^{N} \cos n = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{N}(\cos\theta + i \sin\theta)\right) = \frac{-1 + \cos 1 + \cos N - \cos(N+1)}{2(1-\cos 1)}$$

も得られます.ここで$\mathrm{Re}\, z$は$z \in \mathbb{C}$の実部です.

さて,無限級数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$が収束することは示せましたから,その収束値を求めてみましょう(今回も厳密性は棚に上げておきます).先程と同様に

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n + i \sin n}{n}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}\right)$$

が成り立つと考えます.ここで

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n} z^n$$

として微分すると

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{in}\,z^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}e^{i}\left(e^{i}z\right)^{n-1}=\frac{e^{i}}{1-e^{i}z}$$

$$\therefore f(z)=\int\frac{e^{i}}{1-e^{i}z}dz=-\mathrm{Log}\left(1-e^{i}z\right)+C\ \left(C\text{: 積分定数}\right).$$

$f(0)=0$ですから,$C=0$とおきます.このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n}=f(1)=-\mathrm{Log}\left(1-e^{i}\right)=-\mathrm{Log}(1-\cos 1-i\sin 1)$$

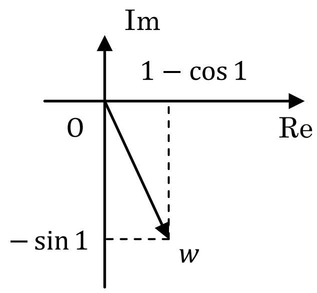
$w=1-\cos 1-i\sin 1$とおくと

$$|w|=\sqrt{(1-\cos 1)^2+(\sin 1)^2}=\sqrt{2(1-\cos 1)}=2\sin\frac{1}{2},$$

$$\tan(\arg w)=-\frac{\sin 1}{1-\cos 1}=-\frac{2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}}{2\sin^2\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\tan\frac{1}{2}}=\tan\left(-\left(\frac{\pi-1}{2}\right)\right).$$

従って,右図より

$$f(1)=-\mathrm{Log}\,w=-\log\left(2\sin\frac{1}{2}\right)+i\left(\frac{\pi-1}{2}\right).$$



以上より,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\mathrm{Im}\left(f(1)\right)=\frac{\pi-1}{2}.$$

また,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}=\mathrm{Re}\left(f(1)\right)=-\log\left(2\sin\frac{1}{2}\right)$$

も成り立ちます.

以上,複素関数論の実関数論への応用例でした.複素関数は,数学だけでなく物理学などでも広く応用されていて,もはや自然科学において必要不可欠な道具へと進化を遂げています.

付録 A 補充問題

入れ忘れた問題があったので,ついでに数問加えて問題集を作りました(全 7 問).時間がある人はどうぞ.

ExA.1 $x \geq 0$に対して,数列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$を

$$a_0 = \lfloor x \rfloor\,, a_1 = \lfloor 10x \rfloor - 10a_0\,, a_2 = \lfloor 100x \rfloor - 100a_0 - 10a_1\,, \cdots$$

のように定める.ただし,$r \in \mathbb{R}$に対して

$$\lfloor r \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq r\}$$

とする.このとき,数列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$を十進小数表記で

$$x_n = a_0.\,a_1 a_2 \cdots a_n$$

と定めたとき,$(x_n)_{n=1}^{\infty}$はxに収束することを示せ.

ExA.2 次の漸化式で定められる数列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$が収束することを示せ:

$$a_1 = e\,, a_n = \frac{n-1}{n} e^{\frac{1}{n}} a_{n-1} \ (n \geq 2).$$

ExA.3 $e^{\pi} > 20$を示せ.

ExA.4 次の極限値を求めよ.

(1) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x}\right)$　　　(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin(\tan x)) - \sqrt{1-x^2}}{x^6}$

ExA.5 曲面$x^4 - xy + y^4 - z = 0$上の点$(1,1,1)$における法線の方程式を求めよ.

ExA.6 半径rの円の周上に 3 点$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{P}$をとる.このとき,内積$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$の最小値を求めよ.

ExA.7 点(x_0, y_0)から直線$ax + by + c = 0$までの最短距離と,それを与える直線上の点を求めよ.

付録 B 問題の解答

この講義ノートでとりあげた問題の解答です.ほとんど筆者が勝手に加えた問題なので,おかしいところがあったらそれとなく教えて下さい.

(Ex3.1.1)

(1) $P_n=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right)$とすると$P_n\to(0,0)$だが,

$$f(P_n)=\frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}}=\frac{1}{2}\nrightarrow 0.$$

よってfは原点において連続でない. (Q.E.D.)

(2) 極座標(r,θ)でfを表示すると

$$|f(x,y)|=|f(r\cos\theta,r\sin\theta)|=\left|r^2\cos\theta\sin\theta\frac{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^2}\right|=\left|\frac{r^2}{2}\sin 2\theta\cos 2\theta\right|$$
$$=\left|\frac{r^2}{4}\sin 4\theta\right|\leq\frac{r^2}{4}\to 0\ (r\to 0).$$

よってfは原点において連続である. (Q.E.D.)

★関数がある点において連続だということを示すためには,このようにその点を極とする極座標表示を用いると便利なことが多いみたいです.$r\to 0$の極限が,その点への近づき方をすべて網羅することによるのでしょう.

(Ex3.2.1)

$(x,y)\neq(0,0)$のとき

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2xy(x^4+y^2)-x^2y\cdot 4x^3}{(x^4+y^2)^2}=\frac{2xy(y^2-x^4)}{(x^4+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^2(x^4+y^2)-x^2y\cdot 2y}{(x^4+y^2)^2}=\frac{x^2(x^4-y^2)}{(x^4+y^2)^2}.$$

また

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0.$$

★fは「原点において連続ではないが偏微分可能である関数」の例を与えています.

(Ex3.2.2)

(1) $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$であるから

$$\frac{\left|f(x,y) - \left(f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y\right)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|xy(x^2-y^2)|}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

極座標(r,θ)で表示すると

$$\frac{|xy(x^2-y^2)|}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|r^2\cos\theta\sin\theta\cdot r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)|}{r^3} = \frac{r}{2}|\sin 2\theta\cos 2\theta| = \frac{r}{4}|\sin 4\theta| \leq \frac{r}{4}$$
$$\to 0\ (r\to 0).$$

よってfは原点において全微分可能である.　(Q.E.D.)

(2)

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{|h|} = 0.$$

であり,同様に$f_y(0,0) = 0$だから

$$\frac{\left|f(x,y) - \left(f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y\right)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0\ \left((x,y)\to(0,0)\right).$$

よってfは原点において全微分可能である.　(Q.E.D.)

★(1)の関数はC^1級です.余力のある人は確かめてみてください.一方(2)の関数はC^1級ではありません.つまり「全微分可能だがC^1級でない関数」の例です.

(Ex3.3.1)

$(x,y)\neq(0,0)$のとき

$$f_x(x,y) = \frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y) = \frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

また

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$$

従って

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h} = 1,$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-h}{h} = -1.$$

★$f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$となっていますね.

Ex3.3.2

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial y}$$
$$=\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial u}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial y}$$
$$=\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\frac{\partial}{\partial y}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

同様にして

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\frac{\partial}{\partial y}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

★ここではφ,ψ及びこの作用素が作用する関数はC^2級であることが前提とされています.

Ex3.3.3

$$\frac{\partial}{\partial r}=\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial y},$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta}=\frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial y}=-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}.$$

これら 2 式を連立方程式として解いて

$$\frac{\partial}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

従って

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$
$$=\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r}$$
$$+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$
$$=\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

同様にして

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$\therefore \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

★$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$を求めるとき,$\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}$を$x, y$で表してから連立方程式を解くという方法をとりましたが,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

ですから,次のようにして直接計算しても構いません:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{y}{x^2 + y^2}\frac{\partial}{\partial \theta} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

逆関数の微分法(定理 2.1.4)を使えば逆三角関数の導関数を求めることはできますが,講義で扱わなかった以上テストの範囲からは除外してよいと思います.

(Ex3.4.1)

(1) 停留点(x, y)において

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (x, y) = (0,0), (1,1).$$

これらは共に$f = 0$を満たす.また

$$A(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, B(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3, C(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

に対して$D(x, y) = B^2 - AC = 9 - 36xy$を考えると

$$D(0,0) = 9 > 0, D(1,1) = -27 < 0.$$

さらに

$$A(1,1) = 6 > 0.$$

よってfは点$(1,1)$で極小値-1をとる.

★Dの値を各停留点に対して計算し,その値が負となるものに対してはAの値も計算して極大・極小を判断します.原点におけるDの値は正でしたから,原点は鞍点となります.

(2) 停留点(x, y)において

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2 y + y^3 - y \\ x^3 + 3xy^2 - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (x, y) = (0,0), (0, \pm 1), (\pm 1, 0), \left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right) \text{ [複号任意]}.$$

この内$f = 0$を満たすものは

$$(x,y)=(0,0),\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right).$$

また

$$A(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6xy\ ,B(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=3x^2+3y^2-1\ ,C(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6xy$$

に対して$D(x,y)=B^2-AC$を考えると

$$D(0,0)=1>0\ ,D\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=-2<0\ [\text{複号任意}].$$

さらに

$$A\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}>0\ ,A\left(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}<0\ [\text{複号同順}].$$

よってfは点$\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)$で極小値$-\frac{1}{8}$,点$\left(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2}\right)$で極大値$\frac{1}{8}$をとる.

(Ex3.4.2)

三角形の 3 辺の長さをx,y,zとおくと

$$0<x<y+z\ ,0<y<z+x\ ,0<z<x+y \qquad \text{(B.1)}$$

が成り立つ.逆に,これらの不等式を満たすx,y,zは三角形の 3 辺の長さとなりうる.さて,三角形の周長を$2s$(一定)とおくと,その面積は

$$S=\sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$$

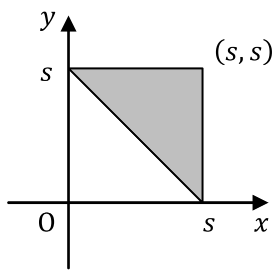
で与えられる(Heron の公式).そこで

$$z=2s-x-y$$

とおき,関数

$$f(x,y)=\frac{S^2}{s}=(s-x)(s-y)(x+y-s)$$

を考えると,(B.1)より,$f(x,y)$の定義域は右図における陰影部分の三角形Dの内部である.Dの境界の各点において$f(x,y)=0$と定義すると,fは境界もこめた閉集合$\overline{D}$上で連続な関数となる.このときfは最大値及び最小値をとる(定理 3.1.3)が,最小値は 0 で,境界上の各点で与えられることを考えると,最大値をとるのは内部Dの点であり



$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

を満たす.ここで

$$\frac{\partial f}{\partial x}=(s-y)(2s-2x-y)\ ,\frac{\partial f}{\partial x}=(s-x)(2s-x-2y)$$

であるから

$$(x, y) = \left(\frac{2}{3}s, \frac{2}{3}s\right)$$

を得る.従って,周長$2s$の三角形の面積を最大にするのは$x = y = z = \frac{2}{3}s$,すなわち正三角形である.

★解答の中で,三角形の性質から導かれるfの定義域にその境界を付加しました.それにより定義域が閉集合となって,fの最大値・最小値の存在が保証されるからです.
この問題自体は,偏微分を持ち出さずとも,相加相乗不等式を用いて

$$\frac{S^2}{s} = (s-x)(s-y)(s-z) \leq \left(\frac{(s-x)+(s-y)+(s-z)}{3}\right)^3 = \frac{s^3}{27}$$

等号は$s - x = s - y = s - z$,すなわち$x = y = z$のときに成り立つ

などとすれば簡単に解答が書けます.

(Ex3.5.1)

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2 + z^2 \\ 2yz \\ 2xz + y^2 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\nabla f(1,2,-3) = \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

従って,接平面の方程式は

$$6(x-1) - 6(y-2) - (z+3) = 0.$$

(Ex3.6.1)

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

とおく.

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 3y^2 \end{pmatrix}, \nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$\nabla g = 0$とすると$(x, y) = (0,0)$だが,これは$g = 0$を満たさない.$\nabla g \neq 0$のとき,Lagrange の未定乗数法(定理 3.6.1)より,fが最大ないし最小となる(x, y)は連立方程式

$$\begin{pmatrix} 3x^2 \\ 3y^2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}, x^2 + y^2 - 1 = 0$$

の解である.これを解いて

$$(x, y, \lambda) = \left(0, \pm 1, \pm\frac{3}{2}\right), \left(\pm 1, 0, \pm\frac{3}{2}\right), \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) \text{[複号同順]}.$$

ここで

$$f(0,1)=f(1,0)=1\,,f(0,-1)=f(-1,0)=-1\,,$$
$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\,,f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$$
であるから$(0,1),(1,0)$で最大値 1,$(0,-1),(-1,0)$で最小値-1.

(Ex3.6.2)

$x(t,\theta),y(t,\theta)$に対し,
$$\nabla x=\begin{pmatrix} v_0\cos\theta\, e^{-\beta t}\\ -\dfrac{v_0\sin\theta}{\beta}\left(1-e^{-\beta t}\right)\end{pmatrix},\nabla y=\begin{pmatrix} -\dfrac{g}{\beta}+\left(v_0\sin\theta+\dfrac{g}{\beta}\right)e^{-\beta t}\\ \dfrac{v_0\cos\theta}{\beta}\left(1-e^{-\beta t}\right)\end{pmatrix}.$$
$t\geq 0\,,0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$の範囲で考えるが,境界において$x$が最大値をとらないことは明らかである.境界以外では$\nabla y\neq 0$であるから,Lagrange の未定乗数法(定理 3.6.1)より,xが最大となる(t,θ)は連立方程式
$$\begin{cases} v_0\cos\theta\, e^{-\beta t}=\lambda\left(-\dfrac{g}{\beta}+\left(v_0\sin\theta+\dfrac{g}{\beta}\right)e^{-\beta t}\right) & \text{(B.2)}\\ -\dfrac{v_0\sin\theta}{\beta}\left(1-e^{-\beta t}\right)=\lambda\dfrac{v_0\cos\theta}{\beta}\left(1-e^{-\beta t}\right) & \text{(B.3)}\\ -\dfrac{g}{\beta}t+\dfrac{1}{\beta}\left(v_0\sin\theta+\dfrac{g}{\beta}\right)\left(1-e^{-\beta t}\right)=0 & \text{(B.4)}\end{cases}$$
の解である.$t>0\,,0<\theta<\frac{\pi}{2}$において$1-e^{-\beta t}\neq 0\,,\cos\theta\neq 0$であるから,(B.3)より
$$\lambda=-\tan\theta.$$
これを(B.2)に代入して
$$v_0\cos\theta\, e^{-\beta t}=-\tan\theta\left(-\frac{g}{\beta}+\left(v_0\sin\theta+\frac{g}{\beta}\right)e^{-\beta t}\right)\iff\left(\frac{v_0}{\cos\theta}+\frac{g}{\beta}\tan\theta\right)e^{-\beta t}=\frac{g}{\beta}\tan\theta$$
$$\iff e^{-\beta t}=\frac{\frac{g}{\beta}\sin\theta}{v_0+\frac{g}{\beta}\sin\theta}.$$
これを(B.4)に代入して
$$-\frac{g}{\beta}\left(-\frac{1}{\beta}\log\frac{\frac{g}{\beta}\sin\theta}{v_0+\frac{g}{\beta}\sin\theta}\right)+\frac{v_0\sin\theta+\frac{g}{\beta}}{\beta}\cdot\frac{v_0}{v_0+\frac{g}{\beta}\sin\theta}=0$$
$$\therefore\frac{g}{\beta}\log\frac{\frac{g}{\beta}\sin\theta}{v_0+\frac{g}{\beta}\sin\theta}+\frac{v_0\sin\theta+\frac{g}{\beta}}{v_0+\frac{g}{\beta}\sin\theta}v_0=0.$$

★この方程式を解いてみましょう.$v_\infty=\frac{g}{\beta}$とおくと

$$v_\infty \log \frac{v_\infty \sin\theta}{v_0 + v_\infty \sin\theta} + \frac{v_0 \sin\theta + v_\infty}{v_0 + v_\infty \sin\theta} v_0 = 0.$$

$r = \frac{v_0}{v_\infty}$とおくと

$$\log \frac{\sin\theta}{r + \sin\theta} + \frac{r\sin\theta + 1}{r + \sin\theta} r = 0. \tag{B.5}$$

$\frac{\sin\theta}{r+\sin\theta} = u$とおくと, $\sin\theta = \frac{ru}{1-u}$より

$$\log u + (r^2 - 1)u + 1 = 0.$$

$$\therefore (r^2 - 1)ue^{(r^2-1)u} = \frac{r^2 - 1}{e}$$

ここで,$y = xe^x\ (x > -1)$は狭義単調増加ですから,その逆関数を$y = W_0(x)$(Lambert のW関数)とすると

$$u = \frac{1}{r^2 - 1} W\left(\frac{r^2 - 1}{e}\right).$$

が得られますから,水平到達距離を最大にする$\theta = \theta_0$は,

$$\theta_0 = \mathrm{Arcsin} \frac{ru}{1 - u}$$

で与えられます.ここで, Arcsinは逆正弦関数の主値(値域$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$)です.

ちなみに,なんとなく予想はできますが$0 < \theta_0 < \frac{\pi}{4}$です.数学的には,たとえば次のように示せます:

(B.5)より,sに関する方程式

$$\log \frac{s}{r + s} + \frac{rs + 1}{r + s} r = 0$$

が$0 < s < \frac{1}{\sqrt{2}}$を満たす解を持てばよいです.左辺を$f(s)$とすると

$$\lim_{s \to +0} f(s) = -\infty$$

ですから,あとは$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$を示しましょう.

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \log \frac{1}{\sqrt{2}r + 1} + \frac{r + \sqrt{2}}{\sqrt{2}r + 1} r$$

右辺を$g(r)$とすると$g(0) = 0$かつ

$$g'(r) = \frac{\sqrt{2}r^2}{\left(\sqrt{2}r + 1\right)^2} > 0$$

よりgは単調増加だから, $r > 0$において$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = g(r) > 0$.

よって,中間値の定理(定理 1.3.4)より$0 < s < \frac{1}{\sqrt{2}}$が成り立ちます.

(ExA.1)

$$0 = (\lfloor 10^n x \rfloor - 10^n a_0 - 10^{n-1} a_1 - \cdots - 10 a_{n-1}) - a_n = \lfloor 10^n x \rfloor - \sum_{k=0}^{n} 10^{n-k} a_k$$

であるから

$$x_n = a_0.a_1a_2\cdots a_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{10^k} = \frac{1}{10^n}\sum_{k=0}^{n}10^{n-k}a_k = \frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}.$$

ここで$10^n x \le \lfloor 10^n x\rfloor < 10^n x + 1$であるから

$$x \le \frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n} < x + \frac{1}{10^n}.$$

$\frac{1}{10^n} \to 0\ (n\to\infty)$だから,はさみうちの原理(定理 1.2.3)より

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n} = x.$$

(ExA.2)

$b_n = \log a_n$とおくと

$$b_1 = 1\,, b_n = b_{n-1} + \frac{1}{n} + \log(n-1) - \log n\ \ (n \ge 2).$$

ここで

$$b_n - b_{n-1} = \frac{1}{n} - (\log n - \log(n-1)) = \int_{n-1}^{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x}\right)dx > 0.$$

また

$$\begin{aligned} b_n &= b_{n-1} + \frac{1}{n} + \log(n-1) - \log n \\ &= \left(b_{n-2} + \frac{1}{n-1} + \log(n-2) - \log(n-1)\right) + \frac{1}{n} + \log(n-1) - \log n \\ &= b_{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \log(n-2) - \log n = \cdots \\ &= b_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \log 1 - \log n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n \end{aligned}$$

であり,

$$\log n = \int_1^n \frac{1}{x}dx \ge \int_1^n \frac{1}{\lfloor x\rfloor + 1}dx = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

が成り立つから

$$b_n \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} = 1.$$

よって数列$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$は,上に有界な単調増加列だから収束する.$a_n = e^{b_n}$であるから,指数関数の連続性によって数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$も収束する. (Q.E.D.)

★数列$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$の収束値は Euler 定数などとよばれ,γで表わされることが多いです.γの小数点以下 40 桁は次の通りです:

$$\gamma = 0.57721\,56649\,01532\,86060\,65120\,90082\,40243\,10421\,\cdots.$$

γが無理数かどうかすらわかっていません.

(ExA.3)

Taylor の定理(定理 2.2.4)より

$$^\forall x > 0\,^\exists 0 < \xi < x\left[e^x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^8}{40320} + \frac{\xi^9}{362880}\right]$$

であるから

$$^\forall x > 0\left[e^x > 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^8}{40320}\right]$$

$$\therefore e^\pi > e^3 > 1 + \frac{9}{2} + \frac{27}{6} + \frac{81}{24} + \frac{243}{120} + \frac{729}{720} + \frac{2187}{5040} + \frac{6561}{40320} = \frac{89641}{4480} > 20.$$

(Q.E.D.)

★実際には$e^\pi = 23.14069263\cdots$です.一般に有理数係数の代数方程式の解となる複素数を代数的数,そうでないものを超越数とよびますが,e^πは超越数です.

(ExA.4)

(1) $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$より

$$(\text{与式}) = \lim_{x\to 0}\frac{x - \log(1+x)}{x\log(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \left(x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)\right)}{x\left(x + O(x^2)\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2} + \frac{O(x^3)}{x^2}}{1 + \frac{O(x^2)}{x}} = \frac{1}{2}.$$

(2) $y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + O(x^8)$とおくと

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + O(y^3) = 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + O(x^6)\right) + \left(\frac{x^4}{4} + O(x^6)\right) + O(x^6)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + O(x^6).$$

よって

$$\tan x = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + O(x^6)\right)$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + O(x^7)$$

であるから,$z = \tan x$とおくと

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + O(z^7)$$

$$= \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + O(x^7)\right) - \frac{1}{6}\left(x^3 + x^5 + O(x^7)\right) + \frac{1}{120}\left(x^5 + O(x^7)\right)$$

$$+ O(x^7) = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + O(x^7).$$

よって$u = \sin(\tan x)$とおくと

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} - \frac{u^6}{720} + O(u^8)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{45} + O(x^8)\right) + \frac{1}{24}\left(x^4 + \frac{2}{3}x^6 + O(x^8)\right)$$

$$- \frac{1}{720}\left(x^6 + O(x^8)\right) + O(x^8) = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{3}{80}x^6 + O(x^8).$$

また,$f(x) = \sqrt{1-x}$とおくと

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}, f''(x) = -\frac{1}{4}(1-x)^{-\frac{3}{2}}, f^{(3)}(x) = -\frac{3}{8}(1-x)^{-\frac{5}{2}}$$

であるから

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + O(x^4)$$

$$\therefore \sqrt{1-x^2} = f(x^2) = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} + O(x^8).$$

以上より

$$(\text{与式}) = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{3}{80}x^6 + O(x^8)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} + O(x^8)\right)}{x^6}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{10} + \frac{O(x^8)}{x^6}\right) = \frac{1}{10}.$$

(ExA.5)

$f(x,y,z) = x^4 - xy + y^4 - z$とおくと

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x^3 - y \\ 4y^3 - x \\ -1 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\nabla f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

よって,法線の方程式は

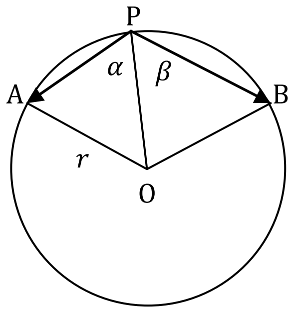
$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{-1}.$$

★講義では特に法線について触れていなかったので,その確認.∇fが法線方向のベクトルだということを忘れないようにしてください.

(ExA.6)

内積の値が負となる$\angle \mathrm{APB}>\frac{\pi}{2}$の場合を考えれば十分である.

従って,右図のように円の中心をOとし,$\angle \mathrm{OPA}=\alpha$,$\angle \mathrm{OPB}=\beta$とすると,$0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$としてよい.このとき



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}&=(2\mathrm{PO}\cos\alpha)(2\mathrm{PO}\cos\beta)\cos(\alpha+\beta)\\&=4r^2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta).\end{aligned}$$

$f(\alpha,\beta)=4r^2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$とおくと

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial\alpha}&=4r^2\cos\beta\,(-\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)-\cos\alpha\sin(\alpha+\beta))\\&=-4r^2\cos\beta\sin(2\alpha+\beta).\end{aligned}$$

同様にして

$$\frac{\partial f}{\partial\beta}=-4r^2\cos\alpha\sin(\alpha+2\beta).$$

よって,$\frac{\partial f}{\partial\alpha}=\frac{\partial f}{\partial\beta}=0$を満たす$(\alpha,\beta)$は

$$(\alpha,\beta)=\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right).$$

このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=4r^2\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{r^2}{2}.$$

(ExA.7)

条件$g(x,y)=ax+by+c=0$の下で$f(x,y)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$の最小値を求める.

$$\nabla f=\begin{pmatrix}2(x-x_0)\\2(y-y_0)\end{pmatrix},\nabla g=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

であるが,方程式$ax+by+c=0$が直線を表すことから$(a,b)\neq(0,0)$,すなわち$\nabla g\neq 0$を得るので,Lagrange の未定乗数法(定理 3.6.1)より,fを最小にする(x,y)は連立方程式

$$\begin{pmatrix}2(x-x_0)\\2(y-y_0)\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},ax+by+c=0$$

の解である.これを解いて

$$(x,y)=\left(x_0+\frac{a(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2},y_0+\frac{b(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}\right).$$

このとき

$$f(x,y)=\left(\frac{a(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\frac{b(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}\right)^2=\frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2}.$$

よって,点と直線との最短距離は

$$\sqrt{f(x,y)}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

★この結果自体は高校の知識で導けますが,Lagrange の未定乗数法の応用例としてとりあげてみました.

～あとがき～

またページ数が増えてしまいました.ついつい余計なことを書いてしまうものですね.今学期の講義ノート 3 部のページ数を合計すると,84 ページ(!)でした.

試験勉強ですが,やはり問題演習を積むことが一番だと思います.この講義ノートにもいくつか問題を載せてありますが,他に良い演習書がたくさんあるはずですし,より試験に即した問題集も作ってもらうので,そちらも取り組んでみてください.面倒な問題や変な問題があったと思いますが,それはきっと僕が作った問題です.すみませんでした.

論理的飛躍・不整合や厳密性に欠ける記述を見かけたら,髙橋までお知らせいただけると嬉しいです.その他質問などもできる範囲で答えます.

最後に,ここまでお読みいただきありがとうございました.試験がんばりましょう!

2009 年 8 月 14 日　　髙橋　一史

更新履歴

この講義ノートの更新履歴です.主に間違いの訂正をしてゆきます.
訂正箇所は,本文では青く染めてあります.

2009.8.14　　本講義ノート公開!

2009.8.16　　$(p.6)$ $(\nabla f)(P_0) \subseteq \mathbb{R}^m$ ☞ $(\nabla f)(P_0) \in \mathbb{R}^m$